

Elementy rachunku macierzowego

Przedstawione poniżej informacje stanowią krótkie przypomnienie elementów rachunku macierzowego niezbędne dla zrozumienia podstaw metody elementów skończonych. Algorytmy obliczeniowe MES wymagają niejednokrotnie szerszej znajomości rachunku macierzy.

Macierzą prostokątną $[a_{ik}]$ o wymiarach $m \times n$ nazywamy funkcję, która każdej uporządkowanej parze zmiennych naturalnych (i, k) , $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą a_{ik} . Macierz zapisujemy w postaci tablicy prostokątnej mającej m wierszy i n kolumn:

$$[A] = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (D.1)$$

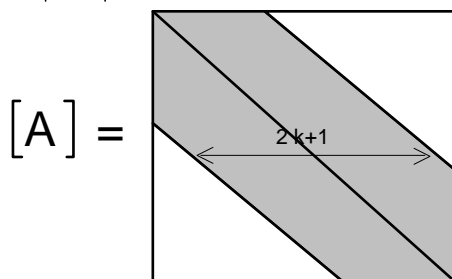
W przypadku, gdy $m = n$ macierz nazywamy kwadratową.

Macierzą diagonalną nazywamy macierz kwadratową, w której wszystkie elementy poza leżącymi na głównej przekątnej (diagonali) są równe zero ($a_{ij} = 0, i \neq j$).

Macierz $[A]_{m \times 1}$ nazywać będziemy wektorem-kolumną i oznaczać $\{A\} = \{a_i\}$ $i = 1, 2, \dots, m$.

Macierz $[A]_{1 \times n}$ nazywać będziemy wektorem-wierszem i oznaczać $[A] = [a_i]$ $i = 1, 2, \dots, n$.

Macierzą pasmową nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie niezerowe elementy leżą na przekątnej głównej (diagonali) i w k równoległych do diagonali liniach z każdej strony ($a_{ij} = 0$ jeśli $|i - j| > k$).



Liczbę $(2k + 1)$ nazywamy szerokością pasma, a liczbę $(k + 1)$ – szerokością półpasma macierzy $[A]$.

Macierzą jednostkową o wymiarze n nazywamy macierz diagonalną o jednostkowych elementach niezerowych

$$[I] = [\delta_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (D.2)$$

gdzie δ_{ik} oznacza symbol Kroneckera: $\delta_{ik} = 1$ gdy $i = k$, $\delta_{ik} = 0$, gdy $i \neq k$.

Macierzą transponowaną macierzy $[A] = [a_{ik}]$ nazywamy macierz $[A]^T = [a_{ki}]$ powstałą

przez przestawienie wierszy i kolumn. W szczególności mamy $[q]^T = \{q\}$ i $\{q\}^T = [q]$.

Macierzą symetryczną nazywamy macierz kwadratową, dla której $[A]^T = [A]$ ($a_{ik} = a_{ki}$).

Podstawowe działania na macierzach

Sumą macierzy $[A] = [a_{ik}]$ i $[B] = [b_{ik}]$ nazywamy macierz $[C] = [a_{ik} + b_{ik}]$.

Operacja dodawania macierzy wymaga zgodności wymiarów macierzy składowych.

Iloczynem macierzy $[A] = [a_{ik}]$ przez liczbę rzeczywistą λ nazywamy macierz

$$[B] = [\lambda a_{ik}].$$

Iloczynem macierzy $[A] = [a_{ik}]$ przez macierz $[B] = [b_{ik}]$ nazywamy macierz $[C] = [c_{ik}]$

taką, że:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m, \\ k = 1, 2, \dots, p. \end{matrix} \quad (D.3)$$

Mnożenie macierzy jest możliwe jedynie w przypadku, gdy liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy.

Mnożenie macierzy nie jest przemienne ($[A][B] \neq [B][A]$).

W podręcznych obliczeniach iloczyn macierzy oblicza się często za pomocą tak zwanego schematu Falka:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & \dots & \dots & c_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & c_{ik} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & \dots & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}$$

Wybrane własności działań na macierzach

$$1. \quad [A] \cdot ([B] \cdot [C]) = ([A] \cdot [B]) \cdot [C] \quad (D.4)$$

$$2. \quad \alpha[A] \cdot [B] = (\alpha[A]) \cdot [B] = [A] \cdot (\alpha[B]) \quad (D.5)$$

$$3. \quad ([A] \cdot [B])^T = [B]^T [A]^T \quad (D.6)$$

Wyznacznik macierzy

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $[A] = [a_{ik}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\det[A]$, która zdefiniowana jest przez związki

$$1) \quad \text{dla } n=1 \quad \det[A] = a_{11}$$

$$2) \quad \text{dla } n=2 \quad \det[A] = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (D.7)$$

$$3) \quad \text{dla } n \geq 3 \quad \text{wyznacznik obliczyć można wybierając dowolny wiersz } r \text{ i stosować tzw. rozwinięcie Laplace'a}$$

$$\det[A] = a_{r1} \alpha_{r1} + a_{r2} \alpha_{r2} + \dots + a_{rn} \alpha_{rn} = \sum_j a_{rj} \alpha_{rj} \quad (D.8)$$

a_{rj} nazywamy dopełnieniem algebraicznym elementu a_{rj} macierzy $[A]$ i obliczamy wg wzoru

$$\alpha_{rj} = (-1)^{r+j} \det[M_{rj}] \quad (D.9)$$

gdzie $[M_{rj}]$ jest podmacierzą macierzy $[A]$ powstałą przez wykreślenie r -tego wiersza i j -tej kolumny macierzy $[A]$.

W szczególności dla $n=3$ otrzymamy wybierając $r=1$

$$\det[A] = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) \quad (D.10)$$

Wyznacznik obliczyć można również stosując analogiczne rozwinięcie Laplace'a względem wybranej kolumny.

Macierz, której wyznacznik jest równy zero nazywamy macierzą osobliwą.

Rzędem macierzy A nazywamy największy wymiar podmacierzy kwadratowej powstałej przez wykreślenie części wierszy i kolumn, dla której wyznacznik jest różny od zera. Rzędem macierzy nieosobliwej o wymiarze n jest więc n . Rząd macierzy osobliwej jest mniejszy niż jego wymiar.

Wybrane własności wyznacznika:

1. Jeżeli jakiegokolwiek dwa wiersze (kolumny) są liniowo zależne (dają się przedstawić w postaci liniowej kombinacji pozostałych) to wartość wyznacznika jest równa zero.

2. $\det[A] = \det[A]^T$.
3. Wyznacznik macierzy diagonalnej jest równy iloczynowi jej elementów diagonalnych.
4. $\det([A] \cdot [B]) = \det[A] \cdot \det[B]$.

Macierz odwrotna

Macierzą odwrotną nieosobliwej macierzy $[A]$ nazywamy macierz $[A]^{-1}$ taką, że

$$[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} [A] = [I] = [\delta_{ik}].$$

Istnieje dokładnie jedna macierz odwrotna macierzy nieosobliwej

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det A} [\alpha_{ik}]^T,$$

gdzie α_{ik} są dopełnieniami algebraicznymi elementów a_{ik} macierzy $[A]$.

Układ równań liniowych. Zagadnienie własne

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

zapisać można w postaci macierzowej

$$\underset{m \times n}{[A]} \underset{n \times 1}{\{x\}} = \underset{m \times 1}{\{b\}}$$

Układ nazywamy sprzecznym, gdy nie posiada żadnego rozwiązania, oznaczonym - gdy posiada dokładnie jedno rozwiązanie, albo nieoznaczonym, gdy posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Twierdzenie Kroneckera-Cappelliego uzależnia istnienie rozwiązania układu od rzędów macierzy układu

$$\underset{m \times n}{[A]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i macierzy rozszerzonej

$$\underset{m \times (n+1)}{[C]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Rzędem macierzy $[A]$ nazywamy największy wymiar kwadratowej podmacierzy macierzy $[A]$ mającej różny od zera wyznacznik i oznaczamy $R([A])$.

Zgodnie z twierdzeniem Kroneckera-Cappelliego

- a) układ równań jest spreczny, gdy $R(A) \neq R(C)$
- b) układ równań jest oznaczony, gdy $R(A) = R(C) = n$
- c) układ jest nieoznaczony, gdy $R(A) = R(C) < n$

W przypadku macierzy kwadratowej ($m = n$) układ jest więc oznaczony jedynie w przypadku, gdy $\det[A] \neq 0$. Rozwiązaniem układu jest wtedy

$$\{x\} = [A]^{-1} \{b\}$$

Rozwiązywanie układów równań metodą poszukiwania macierzy odwrotnej jednak zazwyczaj nie jest stosowane. Inne, bardziej efektywne metody poszukiwania rozwiązania wymagają zwykle mniejszej liczby operacji arytmetycznych.

W przypadku jednorodnego układu n równań z n niewiadomymi

$$[A]\{x\} = \{0\}$$

istnieje zawsze rozwiązanie trywialne $\{x\} = \{0\}$.

Rozwiązania nietrywialne istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy $R([A]) < n$, a więc w przypadku, gdy $\det[A] = 0$.

Wartości własne i wektory własne

Liczbę λ i nieznany wektor $\{x\}$ nazywamy odpowiednio wartością własną i wektorem własnym macierzy $[A]$, jeśli spełniają równość

$$[A]\{x\} = \lambda\{x\}.$$

Wektor własny może być wyznaczony jedynie z dokładnością do mnożnika, tzn. jeśli $\{x\}$ jest wektorem własnym to $c\{x\}$ jest nim również.

Po przekształceniu równania własnego do postaci:

$$([A] - \lambda[I])\{x\} = \{0\}$$

stwierdzić można, że wartości własne λ_i są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego macierzy $[A]$

$$p(\lambda) = \det([A] - \lambda[I]) = \lambda^n + \beta_1\lambda^{n-1} + \beta_2\lambda^{n-2} + \dots + \beta_n = 0$$

Numeryczne rozwiązanie zagadnienia własnego nie polega jednak na rozwiązaniu wielomianu charakterystycznego.

Stosowane są zwykle inne, przeważnie iteracyjne techniki obliczeniowe.

Forma kwadratowa. Dodatnia określoność

Wyrażenie typu

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j = [x][A]\{x\},$$

gdzie $[A]$ jest macierzą symetryczną nazywamy formą kwadratową zmiennych x_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Jeśli dla dowolnego niezerowego wektora $\{x\}$ $Q > 0$ to formę kwadratową nazywamy dodatnio określoną.

Jeśli $Q < 0$ – formę nazywamy ujemnie określoną. Te same określenia stosowane są w stosunku do macierzy $[A]$ definiującej funkcję kwadratową (dodatnia i ujemna określoność).

Uogólnioną formą kwadratową nazywamy wyrażenie typu:

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i = [x][A]\{x\} + [x]\{b\}$$

Ekstremum formy kwadratowej jest określone przez warunki

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Powyższe warunki zapisane w postaci macierzowej przyjmują w przypadku symetrycznej macierzy $[A]$ postać

$$2[A]\{x\} + \{b\} = 0.$$

Otrzymany układ równań liniowych stanowi warunek konieczny i dostateczny ekstremum formy kwadratowej $Q(\{x\})$ a w przypadku, gdy macierz $[A]$ jest dodatnio określona stanowi warunek minimum.

Szczególne własności macierzy typowego układu równań w MES (symetria, pasmowość, dodatnia określoność) są wykorzystywane w procedurach obliczeniowych dla zwiększenia efektywności obliczeń.

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 1

Niech $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. Obliczmy $[A] \cdot [A]^T$.

Według schematu Falka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 11 & 17 \\ 11 & 25 & 39 \\ 17 & 39 & 61 \end{bmatrix}$$

czyli $[C] = [A] \cdot [A]^T = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 17 \\ 11 & 25 & 39 \\ 17 & 39 & 61 \end{bmatrix}$.

PRZYKŁAD 2

Wykazać, że macierz sztywności elementu belki $[k]$ jest osobliwa

$$[k] = \frac{2EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}$$

W macierzy $[k]$ zauważyć można liniową zależność między wierszami (i kolumnami), stąd wniosek, że wyznacznik musi być zerowy. Na przykład wiersz pierwszy jest wynikiem przemnożenia wiersza trzeciego przez -1 . Wiersz pierwszy może być też otrzymany przez sumowanie wierszy drugiego i czwartego i podzielenie wyniku przez l .

PRZYKŁAD 3

Niech $[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć $[A]^{-1}$.

Wyznaczamy najpierw wartość wyznacznika:

$$\det[A] = 2 \cdot (-1)^2 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 1 \cdot (-1)^3 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 1 \cdot (-1)^4 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 2 - 1 = 1$$
$$\det[A] = 1.$$

Oznacza to, że istnieje macierz odwrotna. Macierz dopełnień algebraicznych jest w tym przypadku równa:

$$[\alpha_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Stąd } [A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} [\alpha_{ik}]^T$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy:

$$[A] \cdot [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I].$$